《中国科技史料》第 24 卷　第 2 期(2003 年) :132 —146
China Historical Materials of Science and Technology　Vol.24 No.2(2003)

《历象考成后编》中的中心差求法及其日月理论的总体精度
——纪念薄树人先生逝世五周年

石云里
(中国科学技术大学 科技史与科技考古系,安徽 合肥 230026)

摘要:研究《历象考成后编》中求解刻卜勒方程以计算日月中心差的方法的来源及其精度,同时对书中日月理论的总体精度进行分析,发现:书中用于太阳和月亮中心差计算的方法分别是薄利奥和卡西尼方法的简化版本。前一种方法用于太阳中心差计算时可以把最大误差控制在 1 角秒之内,而后一种方法用于月亮中心差计算的最大误差也不会超过 11 角秒。尽管从现代观点来看这两种方法并不是当时的最佳选择,但是,相对于书中日月理论的总体精度水平而言,该书编者的选择还是相当明智的。由于书中吸收了自刻卜勒到牛顿时代西方日月理论发展中诸如此类的重要成果,清代日月位置计算的精度实现了一次飞跃:与《历象考成》中的理论相比,该书日行理论的精度提高了 10 倍以上,月行理论在月黄经的计算方面精度提高了 4 倍以上,在黄纬计算方面精度则提高了将近 10 倍,从而为清代交食预报精度的提高奠定了直接的基础。

关键词:《历象考成后编》;日月理论;中心差;刻卜勒方程;戴进贤
中图分类号: P1-092
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-0798(2003)02-0132-15

现在已经越来越清楚,《历象考成后编》[1](下文简称《后编》)中的日月理论主要是在牛顿(Isaac Newton, 1642 —1727)月行理论①的基础上构建而成的[2 —9]②。而作为该理论的

收稿日期: 2002-11-05;**修回日期**: 2003-04-18
作者简介:石云里(1964 —),安徽宿松人,科学史博士,中国科学技术大学科技史与科技考古系教师。
基金项目:国家自然科学基金项目“中国古代历法的计算机模拟与综合研究”(项目编号:10173012)

① 牛顿的月行理论共有两个版本,一是单行本,二是《自然哲学的数学原理》第三卷中的版本。前者是实际计算的直接指南,而后者则主要用于理论解释,很直接难用于实际计算。从这个意义上来讲,《后编》中的月行理论不可能主要依赖于《自然哲学的数学原理》中的版本。文献[20]中包括有前一个版本的全文以及详细注释,而且对两个版本的区别也有清楚的讨论。

② 早在 20 世纪 30 年代,费赖之已经注意到戴进贤在中国使用了牛顿天文表,翻译了德国耶稣会天文学家格拉马迪库思(N. Grammaticus)在牛顿理论基础上编制的天文表,但是他并未把牛顿天文表、格拉马迪库思天文表和《后编》中的天文表联系起来。这种状况基本上被后来荣振华所延续。韩琦最早指出了三者之间的联系。参见文献[2 —5]。

重要基础,书中在讨论日月中心差的计算时详细介绍并实际采用了刻卜勒(Johannes Kepler, 1571—1630)的椭圆轨道及等面积定律,并引入了刻卜勒方程的几种近似解法[10]。先师薄树人先生曾撰文对书中与此相关的内容以及清代中国学者对刻卜勒方程解法的研究进行了深入探讨[11]。在先师逝世五周年之际,重读此文,觉得应该在先生工作的基础上把这个问题的研究向前推进一步。所想到的能够进一步加以探讨的问题有这样几个:第一,书中在计算太阳和月亮中心差时具体所用的刻卜勒方程解法先生尚未遑细论,而从考察书中理论实际运用的角度来看,尚有可加以讨论的余地;第二,尽管书中的日月理论主要参考了牛顿的工作,但牛顿在《自然哲学的数学原理》中提出的刻卜勒方程解法[12]并没有得到介绍和使用,所以可以追溯一下戴进贤(Ignatius Koegler, 1680—1746)等人在具体计算过程中所用的方法的来源是什么;第三,由于书中所用的这些方法都为几何法,均带有一定的近似性,所以可以利用现代理论和手段分析一下它们达到的精度如何;第四,由于书中引入了如此多的新理论和新方法,所以我们不禁想知道,这些新理论、新方法究竟在何种程度上改变了清朝在日月运动计算方面的水平,为此,我们可以通过计算机模拟,把书中的日月理论与《历象考成》(下文简称《考成》)中的日月理论组装起来,变成一架可以自动报告任意时刻日月位置的"时钟",利用现代天文理论的计算结果来对它们的精度进行检测,以期为这个问题提供一个明确的回答。按照这种思路,本文首先将依次对书中在计算太阳和月亮中心差时所用的刻卜勒方程解法及其来源进行讨论,并分析它们的精度,然后,将对书中日月理论的整体精度进行分析讨论。

1　太阳中心差

中心差 Δ 是行星(或者卫星)平近点角 M 和真近点角 v 之间的差($\Delta = v - M$)。在本轮-均轮理论中,平近点角被定义为给定时刻行星到近地点的平行距离,真近点角则为行星到近地点之间的实行距离。由于平行距离是时间的一次函数,很容易由行星的平黄经与其近地点黄经之间的差求出。所以,在知道中心差的情况下,很容易由 $v = M + \Delta$ 求得行星的真近点角,并由真近点角加近地点黄经求出行星的真黄经。但是,在椭圆轨道理论中,行星的近点运动规律是用刻卜勒第二定律描述的,近点角不再简单地等同于行星到近地点之间的平行距离,而变成了一个用面积速度表示的抽象角度,平近点角与真近点角之间的关系则是通过一个中间变量(偏近点角)由刻卜勒方程规定的。所以,在给定平近点角的情况下,要通过解刻卜勒方程才能够求得真近点角,进而求出行星的真黄经。在一般的天文表中,大多会通过求解刻卜勒方程预先计算出与平近点角相对的中心差,编出中心差表。这样,在计算行星的位置时只须查表求 Δ,并由 $v = M + \Delta$ 求行星的真近点角,而无需每次都去求解刻卜勒方程。

这个计算过程看上去并不复杂,但是由于刻卜勒方程是一个超越方程,无法精确求解,所以问题就变得比较麻烦了。为此,在刻卜勒之后,接受椭圆假说的许多西方天文学家都致力于从几何上构建刻卜勒第二定律的等效形式,并由此解决平近点角和真近点角之间的互求问题。这种工作被现代天文史家称为刻卜勒方程的几何解法。英国天文学家

沃德(Seth Ward ,1617 —1689) 以及薄利奥(Ismael Boulliau ,1605 —1694) 较早在这方面取得了较好结果[13]。他们的方法影响很大,直到 18 世纪前半期仍为那里的天文学家所使用,并用于大学天文学教科书①,其中最典型的代表就是格利高里(David Gregory ,1659 —1708) [14]和惠斯顿(William Whiston ,1667 —1752) [15]的天文学讲义。《后编》在太阳中心差的推求中介绍了沃德的方法,然而在实际计算中使用的则是薄利奥的方法,但作了进一步的简化。下面我们先根据格利高里天文学讲义中的总结来介绍这两种方法的原貌,然后介绍《后编》中对它们的介绍和实际使用情况。在此过程中,我们还要对这些方法的精度进行分析对比。

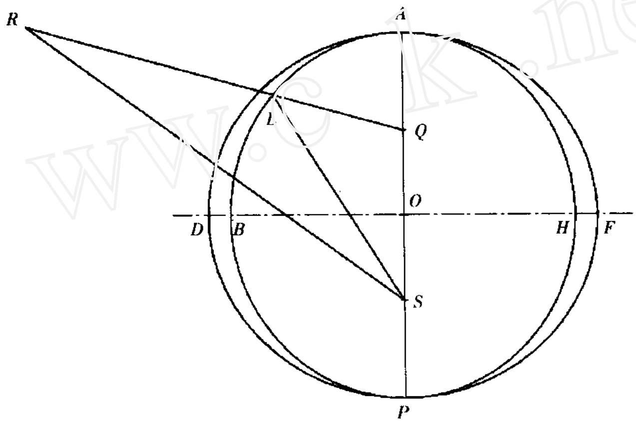

图 1　沃德求中心差的几何模型

沃德的方法可以表示如图 1,其中,椭圆 $ABPH$ 为行星轨道, O 为其中心, $ADPF$ 为其外切圆,太阳位于其焦点 S。设行星轨道半长轴为 a,半短轴为 b,轨道偏心率为 e,行星 L 相对于空焦点 Q 作匀速运动,平近点角 $M = \angle AQL$,真近点角 $v = \angle ASL$。延长 QL 到 R,使 $RL = LS$,连接 RS,则在 $\triangle RQS$ 中,由三角学知识可有:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\angle RSQ + \angle R}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\angle RSQ - \angle R}{2}} = \frac{RQ + QS}{RQ - QS}。$$

由几何学知识可知, $\angle RSQ + \angle R = \angle AQL = M$, $\angle RSQ - \angle R = \angle LSQ = v$; $RQ = 2a$, $QS = 2e$。所以有:

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{M}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}} = \frac{a + e}{a - e}。\tag{1}$$

于是,对于任何给定的 M,均可以由此式求出相应的 v,进而求得中心差 $\Delta = v - M$。将《后编》中所用的太阳轨道的 a 和 e 值代入上式,可以求出 M 每增加一度所对应的中心

① 实际上,沃德的模型来自内尔(Paul Neile),参见文献[13]第 178 页。不过,18 世纪初期的一些天文学家,如格利高里和惠斯顿都把它归之于沃德。

差。与用现代算法[①]所得出的值相比,沃德模型所得结果的绝对偏差最大可达到 14″.85,均方差 10″.39。

薄利奥最早构建的方法与沃德的方法不谋而合,但是薄利奥很快注意到,在这种模型中,平近点角在第一、三象限偏小,二、四象限偏大。针对这个问题,他提出了一种修正形式。这种形式可以表示为图 2,其中 ABP 为行星轨道,ADP 为其外切圆,S 为太阳,F 为空焦点。$\angle AFL$ 为沃德模型中的平近点角,偏小。作 $LE \perp AP$,并延长 LE 至 G。连接 GF,交椭圆于 V。薄利奥认为,V 才是行星所在的真实位置,所以真近点角 $v = \angle VSF$,真正的平近点角也应该是 $M_1 = \angle AFV$。由椭圆的性质可知:

$$\frac{\mathrm{tg}\angle AFV}{\mathrm{tg}\angle AFL} = \frac{\mathrm{tg}M_1}{\mathrm{tg}M} = \frac{a}{b}。\tag{2}$$

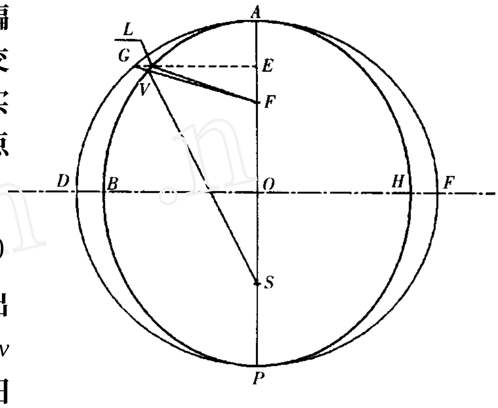

图 2　薄利奥求中心差的几何模型

所以,在实际计算中,应该先用此式由 M 求出 M_1,然后用 M_1 代替 M 代入(1)式,求出相应的 v 和中心差 $\Delta = v - M$。以《后编》中给定的太阳轨道半长轴和偏心率数据依次代入这一模型的算法和现代算法,比较计算结果,可知这一模型在计算太阳中心差时的绝对偏差最大为 0″.66,均方差为 0″.37。

《后编》在引入刻卜勒的前两条定律,并推导出刻卜勒方程之后,首先介绍如何由真近点角求平近点角的方法("借角求积"),然后依次介绍了三种由平近点角求真近点角的方法("借积求角"、"借积求积"和"借角求角"),其中的"借角求角"法实际上就是薄利奥修正沃德的方法。但是书中并没有提到薄利奥的名字,而是把这种方法的发明归诸于卡西尼(Cassini)([1],卷 2,22 页)。薄树人先生已经对这三种方法作了详细讨论。不过在实际计算太阳中心差时,书中所用的方法实际是后者的一种近似形式(方括号中的文字为笔者所加):

> "以二千万[②][$2a$]为一边,倍两心差[$2e$]三三八〇〇〇〇为一边,引数[M]为所夹之角,用切线分外角法求得对倍两心差之角,倍之为椭圆界角。又以椭圆小径[b]九九九八五七一小余八五为一率,大半径[a]为二率,引数之正切为三率,求得四率为椭圆之正切,检表得度分秒,与引数相减,余为椭圆差角,最卑前后各三宫与椭圆界角相加,最高前后各三宫与椭圆界角相减,得均数[Δ]。"([1],卷 4,7ab 页)

由书中给出的对这段计算方法的推导过程([1],卷 1,96a—103b 页)可知,其中第一步计算(求"椭圆界角")的原理可以用图 1 来表示,其中的 RQ 对应于所谓的"二千万为一边",QS 对应于"倍两心差为一边",$\angle R$ 即为"对倍两心差之角",$\angle QLS = 2\angle R = p$ 为"椭圆界

① 我们使用的是目前天体力学计算软件中常用的一种方法,具体算法是:编制一个计算机程序,对每一个给定的 M 值,先将 $E_0 = M$ 作为偏近点角代入刻卜勒方程 $E = M + e\sin E$ 的右边,依次求出 $E_1 = M + e\sin E_0$,$E_2 = M + e\sin E_1$,$E_3 = M + e\sin E_2$,……,直到 $|E_i - E_{i+1}|$ 小于 10^{-15},取 E_i 为偏近点角,进而求出相应的真近点角,再由真近点角减平近点角求出中心差。当然,我们在计算中使用的太阳和月亮轨道偏心率数据都取自《后编》。

② 《后编》中取椭圆半长轴为一千万,故二千万为 $2a$。

角”,为沃德模型中的中心差。计算中使用的所谓“切线分外角法”可以有两种具体做法:一是由(1)式求出 v,再反过来利用 $\angle RSQ + \angle R = M$, $\angle RSQ - \angle R = v$ 的关系求出 $\angle R$;另外一种方法,即延长 RQ,并通过 S 作该延长线的垂线,构成一个以 RS 为斜边的直角三角形,然后通过正切定理求 $\angle R$:

$$\mathrm{tg}\angle R = \frac{QS\sin\angle AFL}{RQ + QS\cos\angle AFL} = \frac{e\sin M}{a + e\cos M}。\tag{3}$$

至于其第二步计算(求“椭圆差角”)的原理则可以用图2来表示,其中求“椭圆之正切”相当于用(2)式 M_1,求“椭圆差角”就是求 $q = \angle VFL = M_1 - M$。最后的中心差为 $\Delta = p \pm q$。

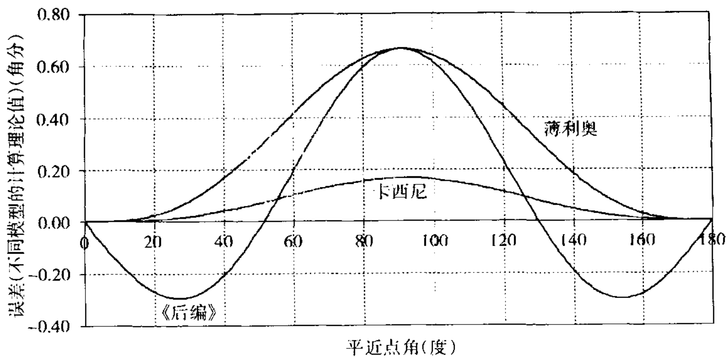

图3 用不同模型求太阳中心差所产生的误差

可见,《后编》所用的实际上是薄利奥的模型,但是在中心差的计算步骤上没有严格按照我们在前面所说的薄利奥原来的顺序,而是相当于先用沃德的模型求出一个初始的中心差,然后再根据薄利奥的模型来对之作进一步的修正。另外一个不同点是,薄利奥与西方天文学家一般以远地点为近点角的起算点,而《后编》则按照中国传统,以近地点为起算点。把《后编》中给定的太阳轨道半长轴和偏心率数据依次代入这一模型的算法和现代算法,并对计算结果进行比较即可发现,这种方法在计算太阳中心差时的最大绝对偏差为0″.66,均方差为0″.34,从总体上来说与薄利奥原来的方法精度相当。至于两者之间在误差分布方面的细微差别,参见图3。

2 月亮中心差

薄利奥的方法在解决太阳中心差计算中达到了比较理想的结果,但是在轨道偏心率更大的月球轨道来说,效果就比较差了:根据我们分析,取《后编》中给定的月球轨道的最大偏心率① 进行计算,则最大绝对误差可达40″.99,均方差21″.07;取其中月球轨道的最

① 牛顿月行理论使用了英国天文学家霍若克斯(Jeromia Horrocks,1618—1641)的月行模型。在这种模型中,月球椭圆轨道的中心沿一个小轮围绕地球转动,使其轨道偏心率随时间不断变化。参见[20]第81—95页。《后编》同样使用了这一模型,在计算月亮中心差表时,书中分别计算出最大、中等和最小偏心率时的中心差,对于任意偏心率值,再用内插法进行推求。

小偏心率计算,最大绝对误差也可达 11″.18,均方差为 5″.75。对于这一点,《后编》有非常清楚的认识,指出:

"自刻白尔[刻卜勒]以平行为椭圆面积求实行,用意甚精,而推算无术。噶西尼[卡西尼]等立借角求角之法①,亦极补凑之妙矣。然日天两心差为本天半径千万分之一十六万余,所差之最大者不过百分秒之六十六②。月天两心差之最大者为本天半径千万分之六十六万余,若仍用日躔之法,则其差之最大者即至四十秒。虽于数不为疏,而于法犹未密。"([1],卷 2, 22a 页)

为此,书中介绍了一种所谓的"两三角形之法":

"以半径一千万为一边,本时两心差为一边,太阴引数与半周相减,余为所夹之角。用切线分外角法求得对两心差之小角,与前所夹之角相加,复为所夹之角。仍以前二边用切线分外角法,求得对半径之大角,为平圆引数。乃以一千万(即椭圆大半径)为一率,本天距地之余弦(以本天距地数为正弦,对其余弦,即椭圆小半径)为二率,平圆引数之正切为三率,求得四率,查正切线,得其实引,与太阴引数相减,得初均数。"([1],卷 4, 20ab 页)

由书中给出的推导过程([1],卷 2, 22a—35b 页)可知,这段计算的原理可以表示为图 4,其中 $ABCD$ 为月球轨道椭圆,O 为其中心,$AECF$ 为其外切圆,a 为其半长轴,b 为其半短轴,e 为其偏心率,D 为地球,位于轨道焦点之上。设平月亮沿外切圆 $AECF$ 运动到 G,则此时的平近点角 $M = \angle AOG$,也就是所谓的"太阴引数"。过 O 作 $OH \parallel OG$,过 H 作 AC 的垂线,交椭圆于 I,垂足为 J。I 为此时真月亮所在的位置,真近点角 $v = \angle ATI$。

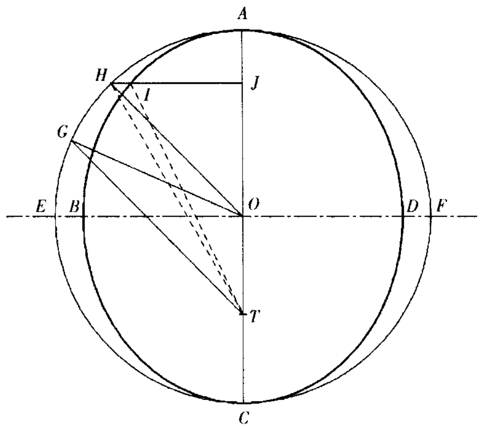

图 4　《后编》中求月亮中心差的几何模型

首先,在 $\triangle GOT$ 中,已知 $GO = a$(即所谓的"以半径一千万为一边"),$OT = e$(即所谓"本时两心差为一边"),$\angle GOT = 180°- M = M_2$(即所谓"太阴引数与半周相减,余为所夹之角"),用上一节(3)式同样的原则可以得到:

① 这种说法不确,参见本文上面的讨论。

② 这与我们上一节的分析结果一致。

$$\mathrm{tg}\angle G = \frac{e\sin M_2}{a - e\cos M_2},$$

$\angle G$ 就是所谓的"对两心差之小角"。

其次,在 $\triangle HOT$ 中,已知 $OH = a$, $OT = e$, $\angle HOT = M_2 + \angle HOG = M_2 + \angle G$(即为"与前所夹之角相加,复为所夹之角")。用(3)式同样的原则可得:

$$\mathrm{tg}\angle HTO = \frac{e\sin(M_2 + \angle G)}{a - e\cos(M_2 + \angle G)},$$

由此可以求得 $\angle HTO$,也就是所谓的"对半径之大角,为平圆引数"。接下来,由上一节(2)式同样的原则,可以得到:

$$\frac{\mathrm{tg}\angle HTO}{\mathrm{tg}\angle ITO} = \frac{a}{b}。\quad (4)$$

进而可以求得 $\angle ITO$,也就是真近点角 v,或者所谓的"实引"。最后可由下式求中心差(也就是所谓"初均数"):

$$\Delta = v - M = \angle ITO - \angle GOT。$$

通过验算可知,对于《后编》中给定的月球轨道偏心率的最小值,这种方法的最大绝对误差为 2″.7979,均方差为 1″.56;而对于最大偏心率,其最大绝对误差为 10″.27,均方差为 5″.71,大大优于薄利奥的方法。可见,《后编》认为这种方法"其差之最大者不过一十秒,较借角求角之法为密"([1],卷 2, 22b 页)的判断是完全正确的。

实际上,《后编》中的这种方法是卡西尼二世(Jacques Cassini,1677—1756)在 1719 年所提出的方法[16]的简化形式。其原来的方法[17]可以表示为图 5,其中 AWP 为行星椭圆轨道,C 为其中心,$AQJP$ 为其外切圆,S 为太阳所在的焦点,$AC = a$, $CS = e$。设 L 为行星的真位置。过 L 作 AP 的垂线,交外切圆于 Q,交 AP 于 R;连接 QC,交椭圆于 W,作 $JW \perp CQ$,则 $\angle ACJ$ 为平近点角 M;连接 JC,作 $SG \perp CJ$, $ST \perp QC$。以此为基础可以进行平近点角和真近点角之间的互求,最为关键的一步是求出 $\angle QCR$,然后用所谓的切线分外角法求 $\angle QSC$,进而用与(4)式同样的道理求真近点角 $\angle QSC$,并进一步求出中心差。由于 $\angle QCR = M - \angle QCJ = M - \angle CJN = M - \angle CJS - \angle SJN$, $\angle CJS$ 很容易由切线分外角法求出,所以,问题的关键就变成了求 $\angle SJN$。在这个图形中,很难对这个角度进行准确推求计算。为此,卡西尼提出了一种推求该角度的近似方法。由于对于一般行星来说 $\angle SJN$ 都很小,所以他取:

$$\angle SJN \approx \sin\angle SJN = \frac{|SN|}{|SJ|} = \frac{|NT| - |ST|}{\sqrt{a^2 + 2ae\cos M + e^2}}。$$

再取 $|NT| - |ST| =$ 弧 $JQ - |JW| = \angle JCQ - \sin\angle JCQ$(当然这里 $\angle JCQ$ 的单位为弧度),于是就有:

$$\angle SJN = \frac{\angle JCQ - \sin\angle JCQ}{\sqrt{a^2 + 2ae\cos M + e^2}}(\text{弧度})。$$

在实际计算中 $\angle JCQ$ 可以在假定 $JS \parallel QC$ 的情况下求出。我们发现,对于太阳和月亮而言,用这种方法求中心差具有很高的精度。取《后编》中给定的最大月球轨道偏心率,其最大绝对误差仅为 0″.023,均方差为 0″.011;取其中给定的最小月球轨道偏心率,最大绝对误差为 0″.003,均方差为 0″.001;取其中的太阳轨道偏心率,最大绝对偏差仅为 0″.00002,

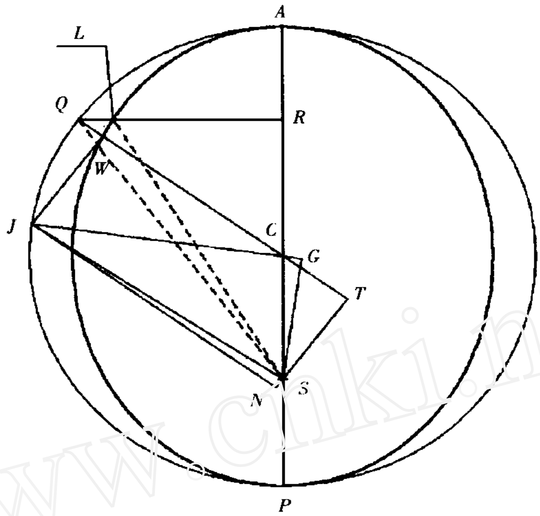

图 5　卡西尼求中心差的几何模型

均方差为 0″.00001。

不过,18 世纪前期的一些欧洲天文学家还是对此模型进行了简化。简化方案之一就是直接过 *S* 作 *CQ* 的平行线,而以该平行线同外切圆的焦点 *J* 为行星的平位置所在,结果就可以得到与《后编》完全相同的计算模型。1726 年荷曼(J. Hermann)就撰文提出了这种简化方案,文章发表在俄国圣彼得堡科学院院刊上[18]。考虑到 18 世纪圣彼得堡科学院与北京的耶稣会士之间的密切通讯交往[19],有理由相信戴进贤等人是由此获得这种方法的。至于他们为什么没有直接使用卡西尼原来的方法,有待进一步讨论。

值得指出的是,用这种简化的卡西尼方法来求太阳中心差实际上可以达到比薄利奥法更好的结果。将《后编》中的太阳轨道偏心率代入这种方法,可知其最大绝对误差仅为 0″.17,均方差为 0″.09(图 3)。可惜的是,戴进贤等人并没有把它用到太阳中心差的推求上。也许他认为,薄利奥方法的最大误差也不超过 1″,所以没有必要使用卡西尼的方法。

3　日月理论的总体精度

最近,英国天文史家科勒斯陀姆(N. Kollerstrom)对牛顿月行理论的精度进行了分析,发现其最佳版本(即牛顿《自然哲学的数学原理》第 2 版中的参数)平均误差不超过 2′,最大误差不超过 ±5′,表明我们原来过分低估了这一理论所达到的实际水平([20],153—161 页)。不过,我们并不能肯定《后编》中的理论是否到了同样的水平。因为首先,《后编》所用的历元以及历元时日月的初始坐标均与牛顿原来的理论不同;其次,科勒斯陀姆在日月中心差计算中并没有使用《后编》中的方法,而是直接使用了现代公式的近似形式([20],74 页)。最重要的是,《后编》中的一些重要参数并不是取自牛顿。例如,对于太阳轨道的偏心率,牛顿的取值为 0.0169167,而《后编》的取值为

0.0169000,该值实际上来自卡西尼([13],193 页);这个值的不同不仅造成了太阳中心差的峰值与牛顿所取的不同(牛顿为 1°56′20″,《后编》为 1°56′12″),而且造成了与太阳中心差大小成正比的月球"一平均"(牛顿的年均差,annual equation)的三个修正值与牛顿取值的不同,这三个修正值直接影响到月亮、月球近地点以及黄白道交点的黄道坐标的推求。再如,对于"末均"(牛顿的第七均数,也就是 the 7th Equation)的系数的变化,牛顿原来只给定了变化范围(3′14″到 1′26″,平均值为 2′20″),而没有明确地给出具体算法。科勒斯陀姆直接把这个系数表示成一个余弦函数([20],124 页),但是 1732 年编成的《御制历象考成表》[21] ①则几乎原封不动地翻译了格拉马迪库思算出的表[22],《后编》中虽然减小了此表引数的增幅,但是其中的数值都是用内插法从格拉马迪库思表计算得来的,而不是使用任何三角函数公式算出的。而格拉马迪库思表值的变化范围为 1′1″到 3′,也与牛顿的取值完全不同②。因此,《后编》日月理论的精度及其相对于《考成》日月理论所达到的水平仍然是一个有待回答的问题,值得我们进一步探讨。

应该指出,《考成》和《后编》为我们的这种探讨提供了最大的便利。两部著作中都包含有所谓的"历法"或者"步法"部分。这部分共给出了两套计算日月位置的方法:第一套方法为一组纯粹的算法,给定了所有必须的参数、公式和计算步骤,无需任何表格;第二套方法是利用预先算好的表格进行计算。第一种方法为利用现代手段进行分析提供了直接基础。在进行一些技术上的调整之后,我们根据它们编成了计算机程序 WENDING(《考成》算法)和 JINXIAN(《后编》算法),可以实现对任意时刻日月位置的推求。同时,我们也

① 此表即《后编》中日躔表和月离表的前身。经过验算对比可知,该表与《后编》中的日躔表和月离表所依据的算法和常数完全一致,只不过《后编》表中的引数的变化步幅更小,通常小到角分量级,而该表引数的变幅最小通常只到度。另外该表中还存在不少小的计算错误,但是在《后编》中基本上都得到了纠正。值得注意的是,该表前面有一页法文手写批注,说明此表系由戴进贤翻译自格拉马迪库思的天文表,由宋君荣(A. Gaubil)在 1734 年间寄给批注作者的。实际上,该表与格拉马迪库思表之间也存在不少差别,比如格拉马迪库思就没有给出月亮中心差表,而只列出了一些相应的中间参数,并说明了借助这些中间参数由平近点角计算真近点角的方法。由于他没有说明这些中间参数的意义和算法,所以很难由此知道他计算中心差的具体模型。由于诸如此类的原因,格拉马迪库思表的算法序列也与《后编》表有所不同。但是,最早让戴进贤注意到牛顿月行理论的很可能是格拉马迪库思,因为他与戴进贤保持有非常密切的通讯联系。戴进贤不断向他提供在中国进行的天文观测结果,而他则不断把欧洲天文学发展的一些最新动态告诉戴进贤。他的天文表在 1726 年出版后(这实际上是最早公开出版的依照牛顿月行理论编制的天文表),很快就被送往中国,在 1727 年已经到达北京。在 1728 年 8 月 19 日的月食中,传教士们对该表和法国天文学家拉希尔(La Hire)的天文表的预报精度进行了比较,结果发现该表优于拉希尔表。有关细节可参见文献[30]。我们注意到,除了哈雷之外,法国天文学家迪莱尔(Joseph-Nicholas Delisle)是在欧洲大陆最早倡导使用牛顿月行理论的人,并因此受到其他法国天文学家的攻击。迪莱尔与格拉马迪库思保持有通讯关系,并向后者鼓吹过牛顿月离表的精度([20],211 页;[31],262—270 页),后者在这个问题上可能受到了他的影响。迪莱尔与在华耶稣会士(包括戴进贤)之间也有通讯关系([31],268 页),宋君荣书信集里保存有不少同他的通讯。但他在向中国介绍牛顿天文学中是否充当了更加直接的角色,目前尚不清楚。

② 从内容和形式上来讲,很难说《后编》中的月行理论是翻译自牛顿的著作的,因为牛顿月行理论的两个版本中均缺少了一些重要均数的计算方法(如本文前面讨论的中心差求法)。而上面这些基本数据的差别则表明,我们甚至不能说《后编》中月行理论中的基本数据都是从牛顿那里翻译过来的。除此之外,还有一些均数的算法也与牛顿的方法不同。很大程度上来说,《后编》中的日月理论是一个重新构建的新体系。这个体系既吸收了当时欧洲计算天文学的最新成果,又力图保持其与《考成》在宇宙模式和理论框架上的连续性,是一个十分独特的理论体系(可以称之为牛顿月行理论的中国版本)。这一特殊理论体系是当时传教士在中国所处的一种独特的科学及社会背景中完成的,是他们对这种科学和社会境况进行应对的直接结果。关于这些问题,本人另有 Newtonian Astronomy for Chinese Use 一文专门讨论(审稿中)。

用相应的子程序对两部著作中给出的相应表格进行了验算,发现这些表格的确是根据相应的算法算出的(这也验证了我们程序的正确性),说明从原则上来讲,两套计算方法是完全等效的。当然,在实际计算中,第二套方法要不断使用内插法来从表列值中求得实际计算所需要的数值,由此可能会造成与第一种方法之间的微小差异。但是,这不会影响我们对两种理论在精度上的总体分析。

我们的基本思路是,用 WENDING 和 JINXIAN 分别求出《考成》历元 1683 年 12 月 21 日北京时间子夜零时之后、《后编》历元 1722 年 12 月 22 日北京时间子夜零时之后连续几年(我们取三年)中每日零时的日、月黄经以及月黄纬的数值(我们称之为"历算值"),然后用现代天文程序算出这些坐标在相应时刻的理论值(我们称之为"现代值"),求出二者之间的绝对误差(历算值 - 现代值),绘制成曲线图,并计算出均方差。对于太阳,我们使用的是缪思(Jean Meeus)所提供的对 VSOP82 理论的简化版本[23],其误差在 - 2000 年到 + 6000 年之间不超过 1″。对于月亮,我们使用的是夏普隆-图泽(M. Chapront-Touzé)等在 EPL 的基础上构建的理论,在我们的验算时段上,该理论在计算月亮黄经时的误差不超过 8″.2,在计算月亮黄纬时误差不超过 1″.3[24]。两种理论的精度都能够满足我们的需要。为了与《考成》和《后编》日月理论的时间系统以及坐标系统相合,我们在使用这两种现代理论进行实际计算的过程中采用的为几何坐标系,基本圈和基本点分别为两部著作历元当日的平黄道和平春分点,而在时间上则使用的是世界时系统(UT)。在进行地方时换算时,我们使用的北京的地理经度为东经 116°25′58″。

分析结果表明,在我们选定的时段上,用《考成》日行理论所求出的太阳黄经的最大误差达 8′.31,均方差 5′.30;月亮黄经的最大误差达 76′.01,均方差 27′.58;月亮黄纬的最大误差为 18′.92,均方差为 10′.58。而用《后编》日月行理论求出的太阳黄经的最大误差仅仅 1′.09,均方差 0′.57;月亮黄经的最大误差为 15′.48,均方差为 6′.48;月亮黄纬的最大误差为 2′.70,均方差 0′.75。具体误差分布情况的对比,参见图 6、7、8。可以很清楚地看出,《后编》日月理论的精度确实比《考成》有较大幅度的提高。

由图可见,《考成》和《后编》在太阳和月亮黄经的计算上存在一定的系统误差。由于

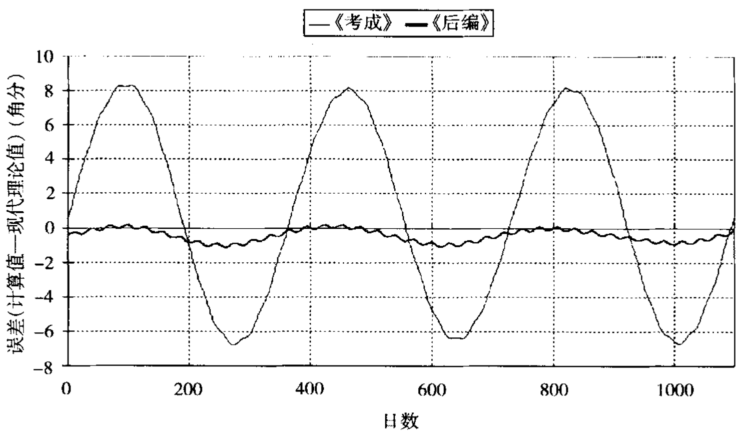

图 6　《考成》与《后编》日行理论精度比较

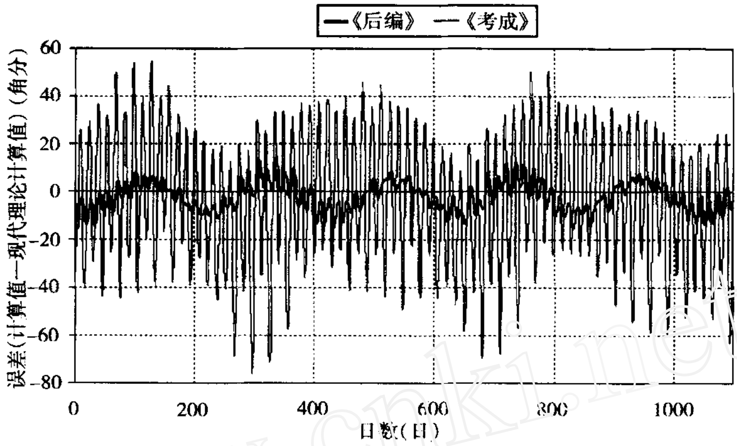

图7 《考成》和《后编》月黄经计算的精度比较

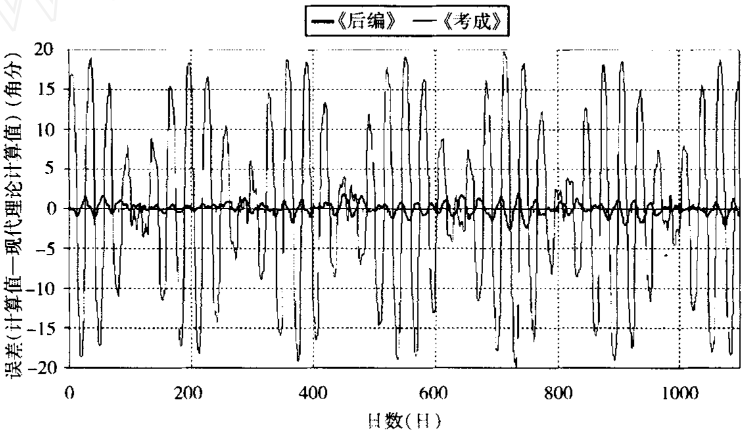

图8 《考成》和《后编》在月黄纬计算方面的精度比较

造成这种误差最重要的原因可能是日月平黄经计算的误差,所以我们又用太阳和月亮平黄经的现代公式① 对二书在太阳平黄经计算上的精度进行了检测,并对它们的绝对误差取算术平均值。分析结果表明,《考成》在太阳平黄经计算中的绝对误差平均值为 0′.78,在月亮平黄经计算中的绝对误差的算术平均值为 - 1′.91;《后编》在太阳平黄经计算中的绝对误差平均值为 - 0′.42,在月亮平黄经计算中的绝对误差的算术平均值则为 - 1′.29。这说明,《后编》在日月平黄经计算方面的精度虽然较《考成》有所提高,但是提高幅度大大小于日月理论总体精度提高的水平。也就是说,造成《后编》精度提高的主导因素是均数修正理论的进步。而对于太阳理论来说,均数修正只有中心差修正,所以可以说《后编》日行理论的主要进步在于中心差修正精度的提高,这一方面是由于轨道偏心率数值的改进,更重要的则是由于对刻卜勒理论引进。

《后编》月亮均数修正理论与《考成》之间存在着较大的区别,除了《考成》中已经使用

① 太阳平黄经公式来自文献[23]第151页;月亮平黄经公式来自文献[24]第12页。

的中心差、一均差、二均差和三均差之外,又引进了牛顿所发现的四种均数,即一平均中关于月球近地点和黄白交点的修正①、二平均、三平均和末均;而在中心差的计算中又引进了牛顿采纳的霍若克斯的月行理论,考虑了月球轨道偏心率的变化(欧拉声称其变根数理论就是受此启发而建立起来的[25])。这些内容凝炼了自刻卜勒到牛顿时代欧洲月行理论方面的最主要的进步。上述误差分析表明,这些进步的确大大推进了月亮位置计算的精度。同时,通过这些理论的引入,也使得清朝在月行理论方面上了一个新台阶。

4　结语

近来,史蒂芬森(F. R. Stephenson)与法杜依(L. J. Fatoohi)合作对《清朝文献通考》中记录的 1644—1785 年之间的日月食食分和各食相时刻的数据进行了误差分析[26—27]。在分析中,他们把这些结果看成是观测记录,结果发现:对于日食,1750 年前食分数据的平均误差达 0.05,初亏、食甚、复圆三个食相时刻数据的平均误差为 15 分钟,1750 年之后食分数据的平均误差降为为 0.03,三个食相时刻数据的平均误差则降低到到 6 分钟;对于月食,1745 年前食分数据的平均误差达 0.07,初亏、食既、食甚、生光、复圆五个食相的肉眼观测误差为 10 到 20 分钟之间,1745 年之后食分数据的平均误差降低到 0.03,五个食相时刻数据的平均误差则降低到 3 分钟之内。他们选 1750 年和 1745 年作为日月食误差分析的分界线的依据是:1750 年前后清钦天监制造了新的浑仪(即"玑衡抚辰仪")可用于日食时间的观测,1745 年前后钦天监制造了一台月食观测仪(即《崇祯历书》"交食历指"中已经介绍过的用于测量月食起复方位和食分的仪器)。

但是,在进行了认真考证之后可以发现,《清朝文献通考》中的这部分交食数据并不是来自观测,而是来自钦天监所作的交食预报[28]。因此,上述分析反映的不是交食观测精度的变化,而是其预报精度的变化,误差分析的分界点也应该选在 1742 年《后编》编成之年(不过这一变化不会对上述分析结果产生太大影响)。由此可以看出,《后编》的使用大大地改进了交食预报的精度,尤其是交食时刻预报的精度。尽管《后编》中采用了卡西尼的新交食理论②,但是,从根本上来说,交食预报精度的提高主要还是取决于日月位置的计算精度的改进。从本文的分析可以看出,《后编》通过引进和吸收刻卜勒到牛顿时代西方日月理论的最新成果,将太阳位置计算的精度提高了 20 倍以上,月亮黄经计算的精度提高了 4 倍以上,黄纬计算精度提高了将近 10 倍,可以说实现了清代天文计算上的一次飞跃。《后编》在交食预报精度方面取得进步的主要根源应该在此。

在《后编》日月理论所引进的西方新知识中,中心差问题占有非常重要的位置,因为从理论上来讲太阳中心差的峰值可达将近 2°,月亮中心差最大则可达到 4°—8°,在均数修正中举足轻重。《后编》引进刻卜勒定律来解决中心差计算问题,这无疑是合乎历史潮流的进步。问题是选用什么样的几何形式来实现刻卜勒方程的近似求解,同时又不在计算精

① 一平均中关于月球黄经的修正最早是由第谷和刻卜勒发现的,但是,他们都把它处理成一种与时差有关的修正量(参见文献[13]第 194—201 页),《考成》在计算月球平黄经时加入了一个叫做"时差行"的修正量,实际就是此项修正。

② 对此《后编》"交食数理"一开始就作了明确交代。

度上作出太大牺牲。尽管《后编》没有能够选用当时精度最高的卡西尼方法,但是它在太阳中心差的推求上使用的薄利奥方法的简化版本已经能够把计算误差控制在一角秒以内,对当时的计算水平来讲已经是十分理想了。同样,在月亮中心差的推求上面,《后编》虽然只使用了卡西尼的简化版本,但是,相对于月球理论的整体误差而言,该版本的误差也在可以容忍的范围之内。重要的是,从本文第二节开始部分的讨论可知,对这些方法的误差范围,《后编》的作者有着十分清醒的认识和主动的判断能力,他们并非是在完全被动而盲目地照搬欧洲天文学家的工作。实际上,直到《后编》开始编写的年代,并非所有的西方天文学家对不同中心差计算模型的精度都具有十分明确的概念。例如,1629 年,英国天文学家李德贝特(Charles Leadbetter)系统论述了使用牛顿月行理论编制月行表的具体方法,其中在求月亮中心差时使用的竟然还是沃德的模型[29]。与此相比,《后编》的选择可以说是足够明智的了。

致谢:本文是作者在迪伯纳科技史研究所(Dibner Institute of the History of Science and Technology)访问期间完成的,其间与荆格里奇(Owen Gingerich)和史密斯(George Smith)等学者进行过有益的讨论,特此致谢。

参考文献:

[1] 戴进贤,徐懋德,等. 历象考成后编[M]. 中国科学技术典籍通汇·天文卷[Z]. 第 7 册. 郑州:河南教育出版社,1993.

[2] Pfister L. *Notices Biographiques et Bibliographiques sur les Jésuites de l'Ancienne Mission de Chine, 1552—1773*[M]. San Francisco: Chinese Materials Center. 1976. 543—546.

[3] Dehergne J. *Répertoire des Jésuites de Chine de 1552 à 1800* [M]. Roma: Institutum historicum S. I.; Paris: Letouzey & Ané, 1973. 137.

[4] 韩琦. 戴进贤[A]. 杜石然. 中国古代科学家传记[C]. 下册. 北京:科学出版社,1993. 334.

[5] 韩琦. 17—18 世纪欧洲和中国的科学关系:以英国皇家学会和在华耶稣会士的交流为例[A]. 黄时鉴. 东西交流论坛[C]. 上海:上海文艺出版社,1998. 141—165.

[6] 石云里.《历象考成后编》提要[A]. 中国科学技术典籍通汇·天文卷[Z]. 第 7 册. 郑州:河南教育出版社,1993. 959—963

[7] 石云里. 中国古代科学技术史纲·天文卷[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,1995. 34.

[8] 鲁大龙. 癸卯元历与牛顿的月球运动理论[J]. 自然科学史研究,1997,(4):329—336.

[9] Lu Dalong. *Guimao yuan Calendar* (1742—1911) and Isaac Newton's Theory of the Moon's Motion, in Celina A. Lértora Mendoza et al. [A]. *The Spread of the Scientific Revolution in the European Periphery, Latin America and Eastern Asia, Preceedings of the XXth International Congress of History of Science* (Liège, 20—26 July 1997) [C]. Volume V. Turnhout, Belgium: Brepolis publishers, 1999. 169—179.

[10] 橋本敬造. 橢圓の展開——《曆象考成後編》の内容について[J]. 東方學報(京都),1971,42:245—272.

[11] 薄树人. 清代学者对刻卜勒方程的研究[A]. 天文学史文集[C]. 第 3 辑. 北京:科学出版社,1984. 96—116.

[12] Newton I. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy, a New Translation by I. Bernard Cohen and Anne Whitman, Assisted by Julia Budenz; Preceded by a Guide to Newton's Principia by I. Bernard Cohen*[M]. Berkeley: University of California Press, 1999. 513—517.

[13] Taton R, Wilson C (eds). *Planetary Astronomy from the Renaissance to the Rise of Astrophysics, Part A: Tycho Brahe to Newton*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1989. 178—179.

[14] Gregory D. *The Elements of Physical and Geometrical Astronomy* (an English translation of the Latin version first published in 1702) [M]. vol. 1. London: Three Crowns, 1726. 388—392.

[15] Whiston W. *Astronomical Lectures* (English translation from the Latin version of 1707) [M]. London: J. Senex, W. and J. Osborne, and T. Longman, 1728. 319—327.

[16] Cassini J. Méthode de Determiner la Premiere Equation des Planètes Suivant l'Hypothese de Kepler[A]. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (Paris)* [M]. 1719. 192—204.

[17] Colwell P. *Solving Kepler's Equation over Three Centuries*[M]. Richmond, Virginia: Willmann-Bell, Inc., 1993. 12—14.

[18] Hermann J. Geminus Modus Dividendi Semicircvlvm in data ratione: Quibus Keplerianum Problema De Inveniendis Planearvm Locis ad datum quodvis tempus Solutum exhibetur [J]. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis* 1726, **1**: 142—148.

[19] 韩琦. 中国科学技术的西传及其影响[M]. 石家庄:河北人民出版社, 1999. 81.

[20] Kollerstrom N. *Newton's forgotten lunar theory: his contribution to the quest for longitude, including the complete text of Isaac Newton's Theory of the moon's motion, 1702*[M]. Santa Fe, N. M.: Green Lion Press, 2000.

[21] 戴进贤, 等. 御制历象考成表[M]. 卷 2. 1732 年前后刻本. 40a—44b.

[22] Grammaticus N. *Tabulae Lunares ex Theoria et Geometrae Celeberrimi domini Isaaci Newtoni* [M]. Ingolstadt: Typis Viduae Grassianae Typogr. Acad, 1726. 7.

[23] Meeus J. *Astronomical Algorithms*[M]. Richimond, Virginia: Willmann-Bell, 1991. 151—155.

[24] Chaprot-Touzé M, Chapront J. *Lunar Tables and Programs from* 4000 *B. C. to A. D.* 8000[M]. Richimond, Virginia: Willmann—Bell, 1991.

[25] Nauenberg M. Newton and the Lunar Motion, Essay Review of *Newton's forgotten Lunar Theory* [J]. *Journal for History of Astronomy*, 2001, **32**: 162—168.

[26] Stephenson F R, Fatoohi L J. Accuracy of Solar Eclipse observations made by Jesuit Astronomers in China [J]. *Journal for the History of Astronomy*, 1995, xxvi: 227—236.

[27] Fatoohi L J, Stephenson F R. Accuracy of Lunar Eclipse Observations Made by Jesuit Astronomers in China[J]. *Journal for the History of Astronomy*, 1996, xxvii: 61—67.

[28] Shi Yunli. The Eclipse Observations Made by Jesuit Astronomers in China: a Reconsideration[J]. *Journal for the History of Astronomy*, 2000, xxxi: 136—147.

[29] Leadbetter C. *Astronomy of the Satellites of the Earth, Jupiter and Saturn: Grounded upon Sir Issac Newton's Theory of the Earth's Satellite*[M]. London: printed for J. Wilcox, at the Green-Dragon, in Little-Britain, 1729. 16.

[30] Gaubil G. *Correspondance de Pékin*[M]. Genève: Droz, 1970. 61, 246, 208—209, 211, 213.

[31] Shaffer S. Halley, Delisle, and the Making of the Comet[A]. In Norman J. W. Thrower (eds). *Standing on the Shoulders of Giants——a Long View of Newton and Halley*[C]. Berkeley, Los Angles, Oxford: University of California Press, 1990. 254—298.

The Calculation of the Equation of Center in the *Lixiang Kaocheng Houbian* and the Accuracy of the Theory of the Sun and Moon in the Book ——In Memory of Professor Bo Shuren

SHI Yun-li

(Dept. of Scientific History and Archaeometry , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China)

Abstract: This paper discusses the Western sources of the methods employed in the *Lixiang Kaocheng Houbian* (Later Edition of the Established System of Calendrical Astronomy) to resolve the Kepler Equation in calculating the solar and lunar equations of center. Meanwhile , it also analyzes the precision of these methods and the overall accuracy of the lunisolar theory of the book in positional calculations. The methods , as applied to the equation of center of the sun and the moon respectively , are found to be simplified versions of the procedures of I. Boulliau and J. Cassini. While the former can be correct to within 1 arcsecond in calculating the equation of solar center , the latter displays an error not exceeding 11 arcseconds as used to calculate the equation of lunar center. The Jesuit authors' selection of these two methods turns out to be very reasonable with respect to the overall precision level of the lunisolar theory of the book , although it was not the best choice of the time as seen from the present point of view. Since the book appropriated the most important European achievements from the time of Kepler to thet of Newton like the two methods , the positional astronomy of the sun and moon thus witnessed a very remarkable advancement in the Qing dynasty: as compared with the theory of the old *Lixiang Kaocheng* , the precision of the positional calculation of the sun enhanced more than ten times , whereas the lunar theory became over four times more accurate in the longitudinal calculation and nearly ten times more accurate in the latitudinal calculation , thus laying a sound foundation for improvement in the predictive calculation of solar and lunar eclipses.

Key words: *Lixiang Kaocheng Houbian* , theory of the sun and moon , equation of center , Kepler equation , I. Kögler

责任编辑:屈宝坤